La Recherche Opérationnelle

La science
pour « mieux comprendre »
et « mieux résoudre »
les problèmes décisionnels

Philippe Chrétienne

2èmes rencontres des
Sciences et Technologies de l'Information
du 24 au 26 octobre 2005
ISIMA, CLERMONT-FERRAND

La R.O. : quelle histoire!

D’illustres précurseurs.

Blaise Pascal (1623-1662) : réflexions sur quelques problèmes de décision dans l’incertain.

Gaspard Monge (1781) :

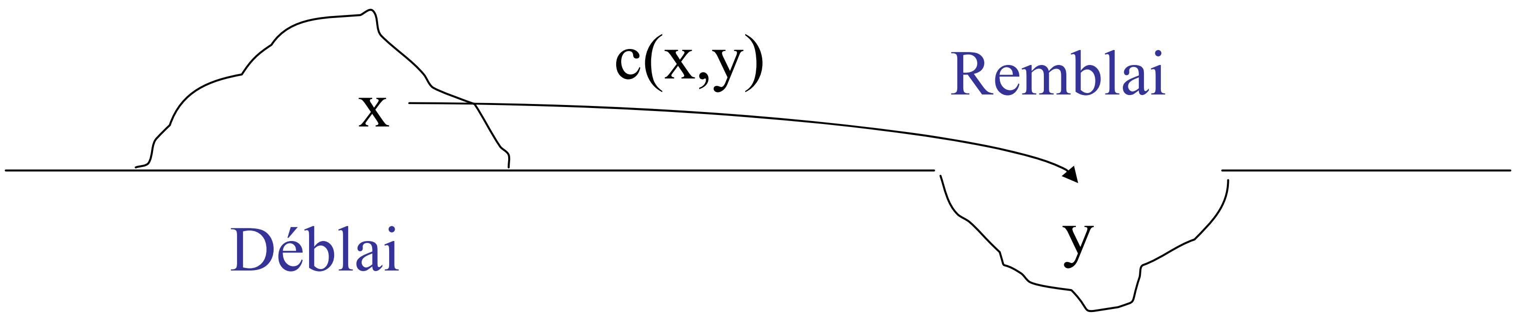
- problème des déblais et des remblais;
- problème des défilements.

Considéré aujourd’hui par les mathématiciens comme le père de l’optimisation .

Déblais et Remblais ou :
Comment déplacer un tas de cailloux au moindre coût ?

Donnée :

- Déblai : des masses de densités $\mu(dx)=f(x)dx$
- Remblai : des masses de densités $\nu(dy)=g(y)dy$
- Hypothèse : $\int f(x)dx = \int g(y)dy$
- fonction coût de transport : $c(x,y)$



Problème :

Trouver une application $T(x,y)$ telle que le coût global de transport $\int c(x,T(x))f(x)dx$ soit minimal.

Harris (1913) :

Formule du lot économique* en Gestion de Stock :

$$Q = (2kC_l/C_s)^{1/2} \quad ; \quad T = (2C_l/kC_s)^{1/2}$$

k : consommation journalière (supposée constante)
C_s : coût de stockage par unité et par jour ;
C_l : coût de lancement d'une commande ;
T : délai « optimal » entre 2 commandes ;
Q : quantité « optimale » à commander.

- fréquence et quantité optimales de réapprovisionnement d'une unité de production

La R.O. moderne commence avec la seconde guerre mondiale.

Patrick Blackett (1940) :

- appelé par l'état major anglais, dirige la 1ère équipe de « R.O. » sur des problèmes d'optimisation militaires :
  - en particulier : implantation optimale de radars de surveillance (problèmes de localisation).

Le nom R.O. est créé :

O pour Opérations (militaires) et
R pour Recherche.

La pratique de cette discipline s'organise.
Résultats limités surtout par manque de capacité de calcul.

Après la guerre, développement très important :

- des outils (théorie, calcul, techniques)
- des champs d'application.

Vous avez dit R.O.?

La R.O. est une discipline visant résoudre scientifiquement les problèmes d'optimisation liés aux organisations du monde réel.

Champs d'application :

- systèmes administratifs (ex : emplois du temps) ;
- ateliers de production (ex : ordonnancement) ;
- systèmes physiques (ex : verres de spin) ;
- systèmes de transport (ex : tournées de distribution)
- systèmes informatiques (ex : localisation de fichiers)
- systèmes biologiques (ex : alignements de séquence)

……

Le plus souvent, la nature de ces problèmes est discrète.

Outils scientifiques :

- Mathématiques Appliquées (Optimisation, Probabilités, Algèbre, Graphes, Jeux, Décision, ….) ;
- Informatique (Algorithmique, Complexité, Contraintes)

L'approche R.O. face à un problème applicatif consiste à :

- élaborer un modèle (résultat d'un consensus entre le demandeur et le chercheur) ;
- développer un algorithme de résolution exacte ou approchée ;
- évaluer la qualité des solutions produites par l'algorithme dans l'environnement réel du problème.

Le chercheur opérationnel cherchera à fournir :

- un outil (logiciel) aussi générique que possible, i.e : utilisable et performant sur un ensemble d'instances ;
- non une solution d'une instance particulière.

Typologie des problèmes de R.O.

3 types de problème :

- combinatoires ;
  - optimisation dans les graphes (flots,…)
  - ordonnancement ;
  - logistique et transport ;
  - localisation ;
  - ….
- stochastiques ;
  - systèmes d'attente ;
  - stratégies dans l'incertain ;
  - …
- aide à la décision ;
  - jeux concurrentiels ;
  - systèmes et modèles de préférences
  - …

Un problème combinatoire emblématique de la R.O. : le voyageur de commerce

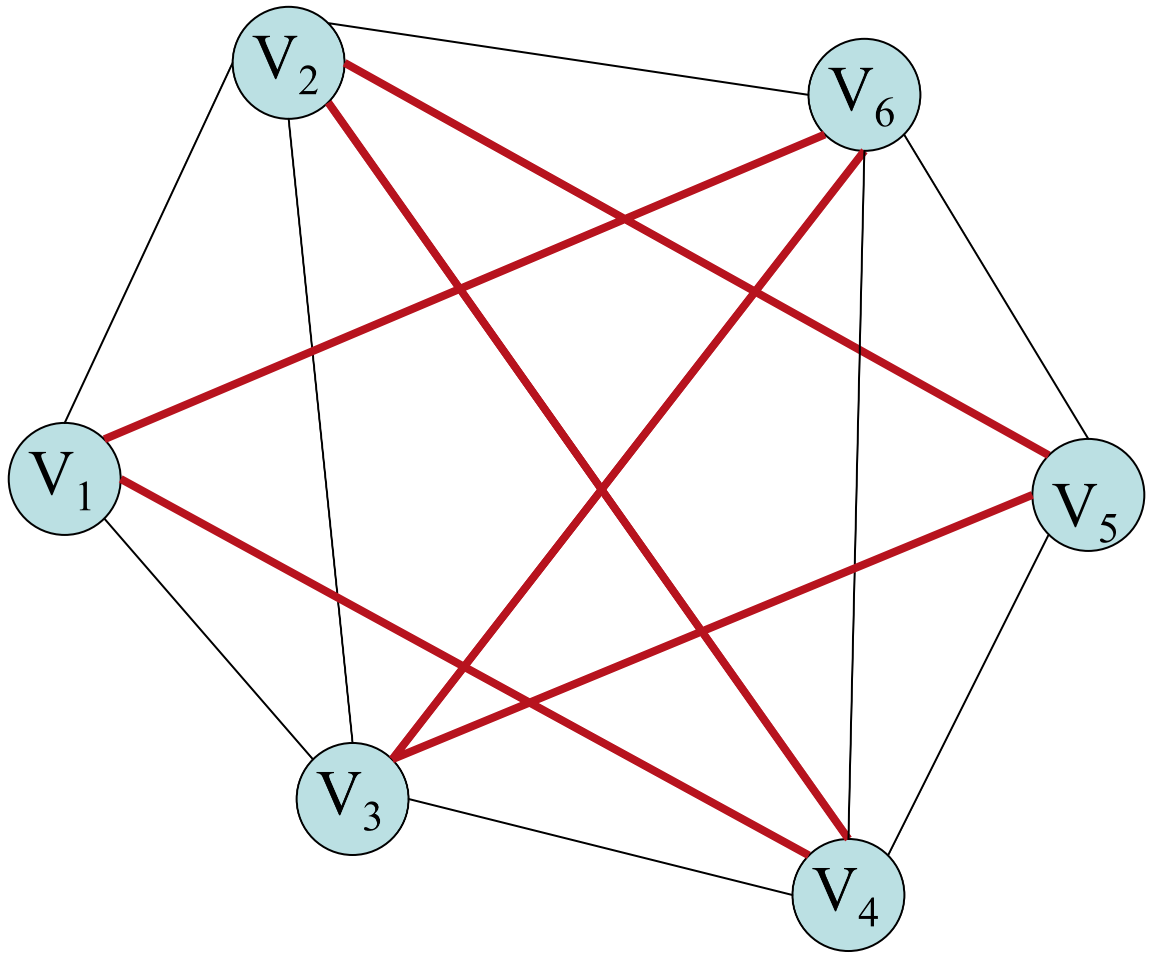
Donnée :

- n villes $V_1, V_2, \ldots V_n$;
- des distances $d(V_i,V_j)$;

Appelons « tour » une permutation circulaire mono-orbitale $(V_{i1},V_{i2},\ldots,V_{in},V_{i1})$ des n villes ;

Le coût d'un tour est la somme des distances parcourues.

Problème :
Déterminer un tour de coût minimum



$(V_1, V_6, V_3, V_5, V_2, V_4, V_1)$ est un tour parmi les 120 tours possibles.

Enumérer les tours est très vite impossible :
le nombre de tours est égal à $(n-1)!$

Taille maximum des problèmes résolus :

- années 60 : 20 villes
- années 80 : 1000 villes ;
- années 00 : 1000000 villes.

Pourquoi cette progression ?

- progrès théoriques : approche polyédrique (nouvelles classes de facettes du polyèdre des tours) ;
- progrès algorithmiques : algos de programmation linéaire continue adaptés, structures de données appropriées, …
- progrès technologiques : vitesse et mémoire des machines.

Localisation de centres de secours

Donnée :

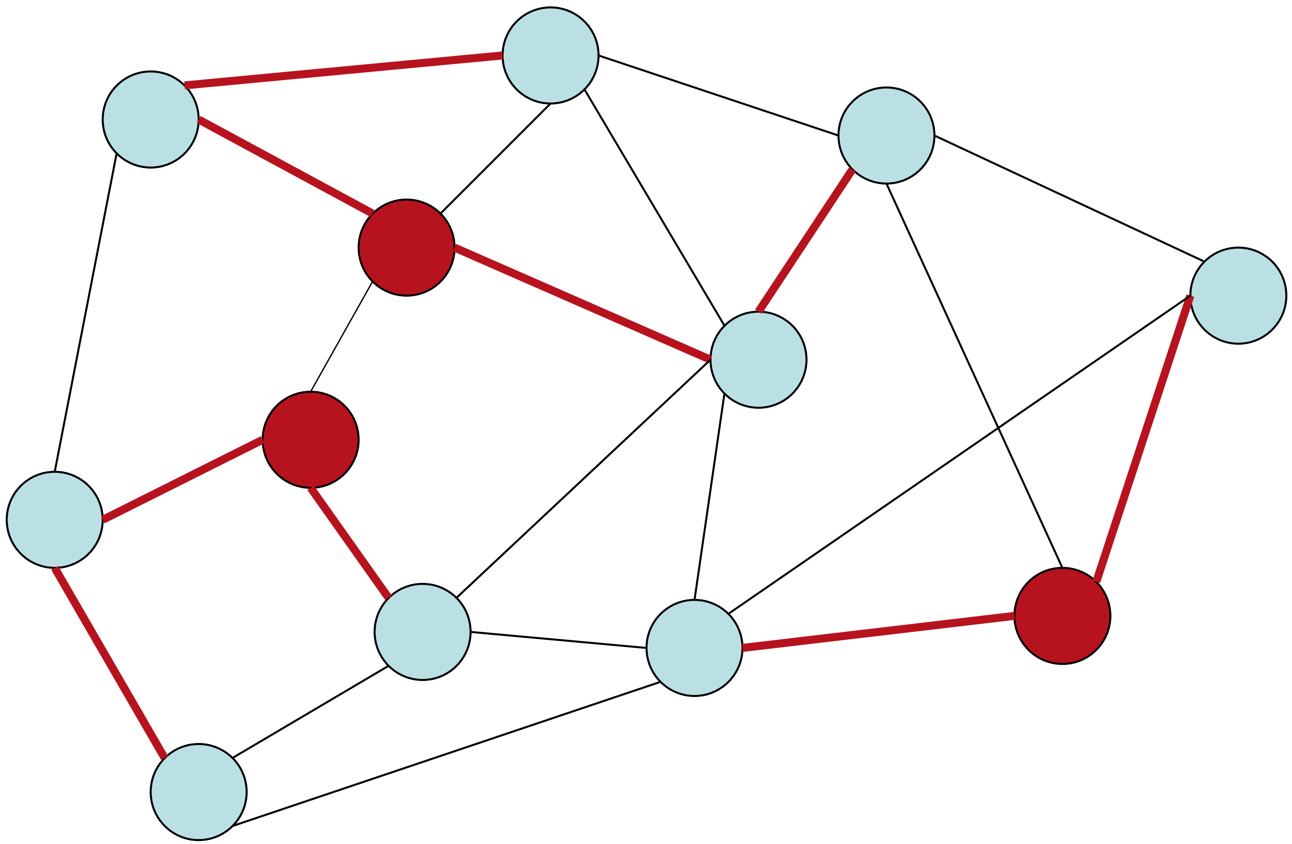
- réseau $R=(X,A)$ des liaisons routières d'une région ;
- nombre K de centres à localiser.

Une solution est un sous-ensemble de K sites de X

Le coût d'une solution s est égal à : $\mathrm{Max}_{x\in X}\ d(x,s)$
où $d(x,s)$ est la longueur d'un plus court chemin de x
à un site de s.

Problème : Déterminer une solution de coût minimum.

Enumérer est rapidement impossible.
Ex : pour 5 centres et 30 sites : 142506 solutions



Une solution pour un réseau de 12 sites et 3 centres

Un problème d'ordonnancement d'atelier : le job-shop

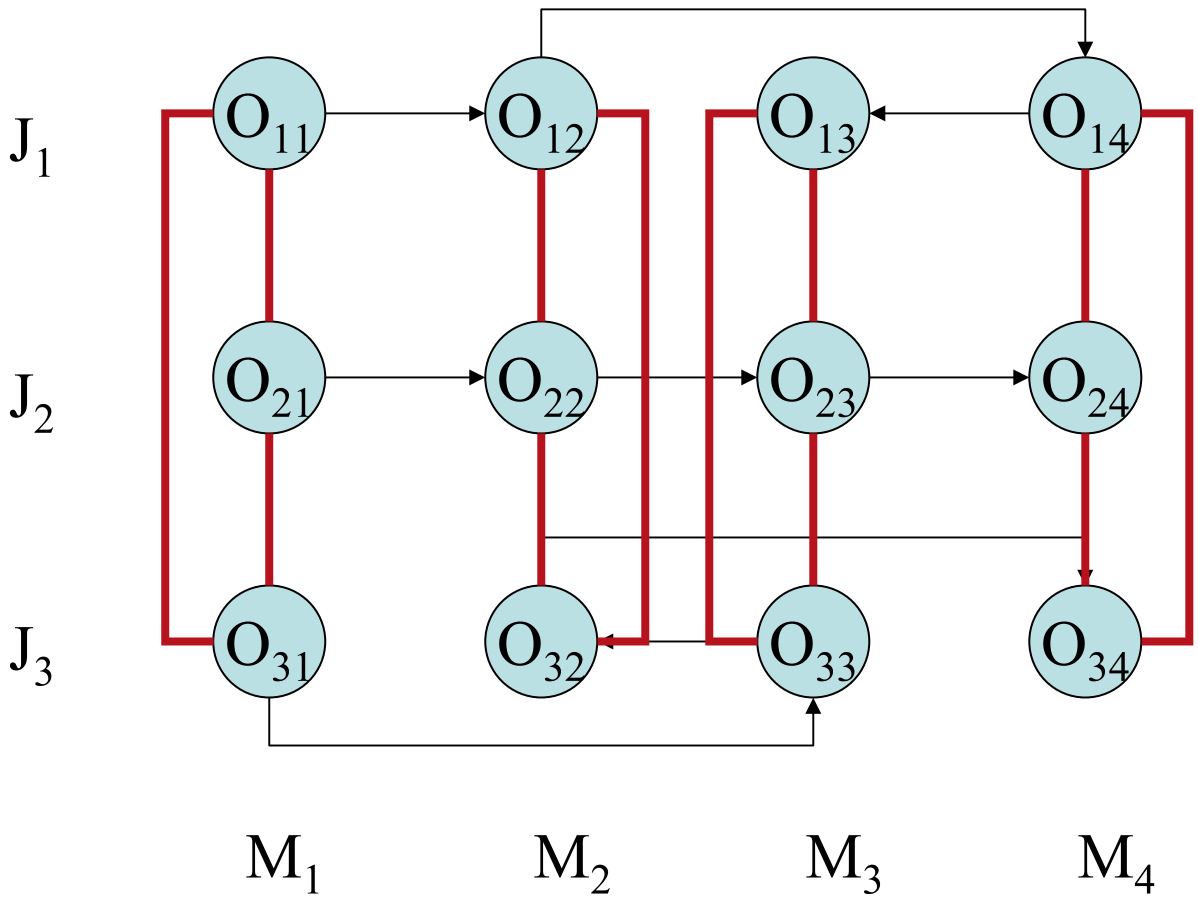
Donnée :

- m machines spécialisées $M_1,M_2,\ldots,M_m$;
- n pièces à fabriquer $J_1,J_2,\ldots,J_n$;

Chaque pièce J_j doit subir une opération sur chacune des machines dans un ordre fixé à l'avance.
Soit O_{jk} l'opération subie par J_j sur la machine M_k.

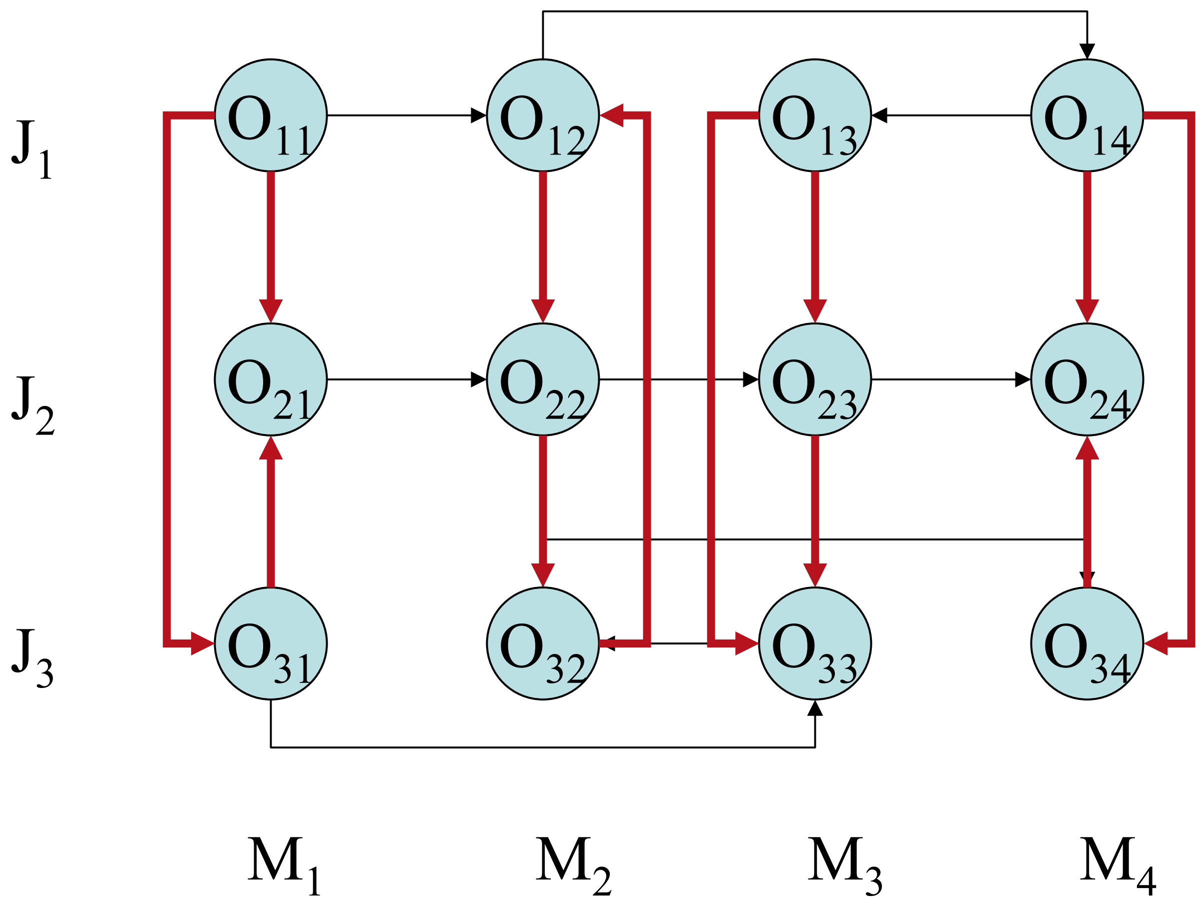
Chaque machine ne peut traiter qu'une pièce à la fois.
Chaque pièce ne peut être traitée que par une machine à la fois.

Modèle « disjonctif »



arc noir : précédence entre 2 opérations d'une même pièce ;
arête rouge : disjonction entre 2 opérations d'une même machine

Une solution s : orientation « acyclique » des arêtes de disjonction



graphe orienté sans circuit G(s)

Chaque arc de s est valué par la durée de son opération « origine » ;
Le coût de s est la valeur maximale d'un chemin de G(s) ;
Il faut trouver une solution de coût minimum.

Nombre de solutions : de l'ordre de $(n!)^m$.

Un problème (10*10) est resté non résolu pendant plus de 10 ans

Aujourd'hui, on résout (exactement) des problèmes de plusieurs dizaines de machines et pièces.

Pourquoi ces progrès :

- Amélioration significative des bornes inférieures (edge-finding, raisonnement énergétique, …) ;
- principes de branchement élaborés ;
- nouvelles propriétés de dominance ;
- progrès algorithmiques sur la complexité du calcul des bornes ;
- apport de l'approche Contraintes ;
- progrès technologiques (vitesse et mémoire) ;
- efficacité et convivialité des solveurs.

Problèmes stochastiques

Trouver une solution « optimale » face à un problème dont les données sont incertaines.

L'incertitude est modélisée par des hypothèses de nature probabiliste.

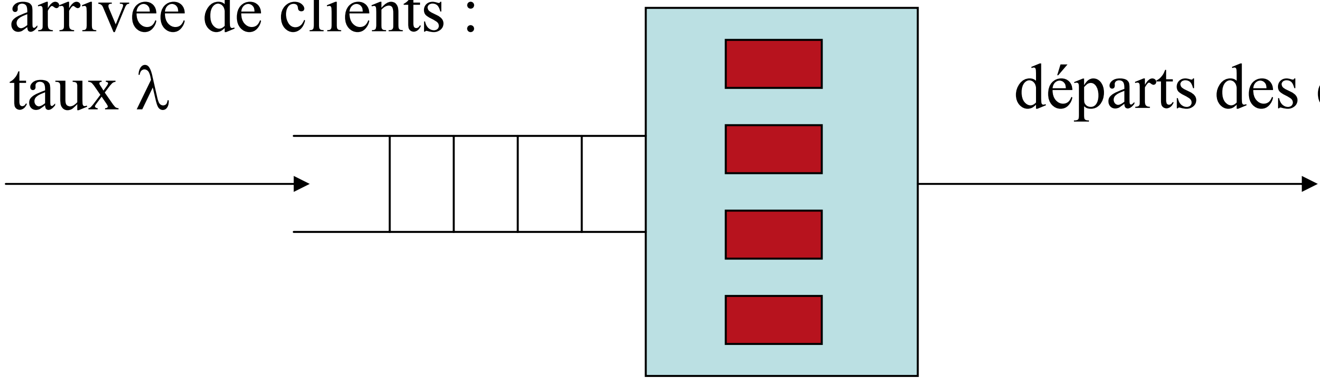
2 types de problèmes :

- Evaluation et dimensionnement de systèmes d'attente.
- Stratégie « optimale » en environnement incertain.

Exemple « simple » de systèmes d'attente

arrivée de clients :
taux λ

départs des clients



service administratif : N guichets
temps moyen de service au guichet : $1/\mu$

Question :
Nombre minimum de guichets pour que : $\mathrm{Prob}(T_{att}>15mn)<0.05$

Avant la seconde guerre mondiale (Erlang) :

- progrès théoriques sur les systèmes à un serveur ;
- applications à la téléphonie.

Le développement de la R.O. a motivé les progrès de cette théorie vers d'autres domaines d'application.

En 1957, Jackson modélise un problème de job shop par un réseau ouvert de files d'attente :

- serveur = machine ;
- client= pièce ;
- routage statique associé aux gammes ;
- arrivées Poissonniennes ;
- durées de traitement exponentielles .

Résultat (de tout premier plan) :

- conditions de stationnarité ;
- distribution du régime permanent.

Avec les réseaux de transmission de données sont apparus de nouveaux problèmes.

Caractéristiques :

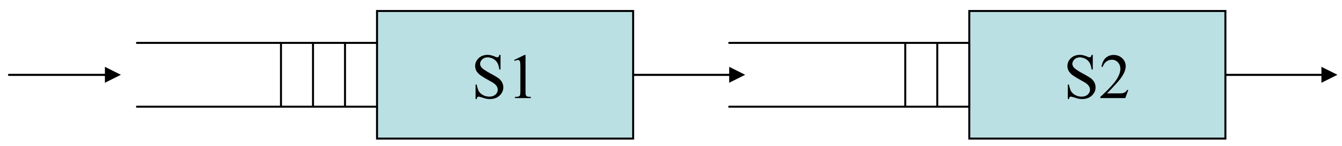
- demandes d'accès aléatoires ;
- quantité de données à transmettre aléatoire ;
- demandes d'accès peu fréquentes ;
- temps de réponse exigés très courts.

Le modèle de Jackson n'est plus valide car :

- les messages conservent leur longueur (donc le même temps de traitement) ;
- corrélation forte entre longueur de message et inter-arrivées ;
- le critère est le temps de réponse.

Réponses apportées à ces questions (Kleinrock)

10 ans pour résoudre le système de 2 serveurs en tandem de capacité identique.



Solution « non explicite »

Résolution d'un problème d'optimisation de dimensionnement de réseau :

$$\text{Min } T = \sum_i (\lambda_i/\gamma)\, T_i \ ;$$

sous les contraintes :

- topologie fixée ;
- procédure de routage fixée ;
- budget fixé

Variables : capacités C_i des serveurs

Contrainte budget : $\sum_i d_i C_i \leq D$

Résultats :

capacités optimales :

$C_i^* = \lambda_i/\mu + D_e/d_i\ (\lambda_i\, d_i)^{1/2}\ (1/\ \sum_i (\lambda_i\, d_i)^{1/2}$

où :

$D_e = D - (1/\mu)\ \sum_i (\lambda_i\, d_i)$

temps de réponse minimal :

$T = [\hat{e}/\ (\mu D_e]\ {}_*[\sum_i (\lambda_i\, d_i/\ \lambda)^{1/2}\ ]^2$

où :

$\lambda = \sum_i \lambda_i$ et $\hat{e} = \lambda/\ \gamma$.

Aide à la décision

Deux types de problèmes :

- problèmes concurrentiels ;
- évaluation et modèles de préférences.

Problèmes concurrentiels :

- plusieurs acteurs ;
- la solution optimale pour un acteur dépend des décisions prises par les autres.

Exemple :
Choix d'une politique de prix de vente dont les résultats dépendent des politiques des concurrents.

Préférences :

Evaluer chaque solution d'un problème par un seul scalaire est souvent restrictif :

- construction et évaluation de modèles de préférences plus réalistes satisfaisant un ensemble d'axiomes ;
- optimisation multicritère.

Optimisation multicritère

Soit S l'ensemble des solutions d'un problème.

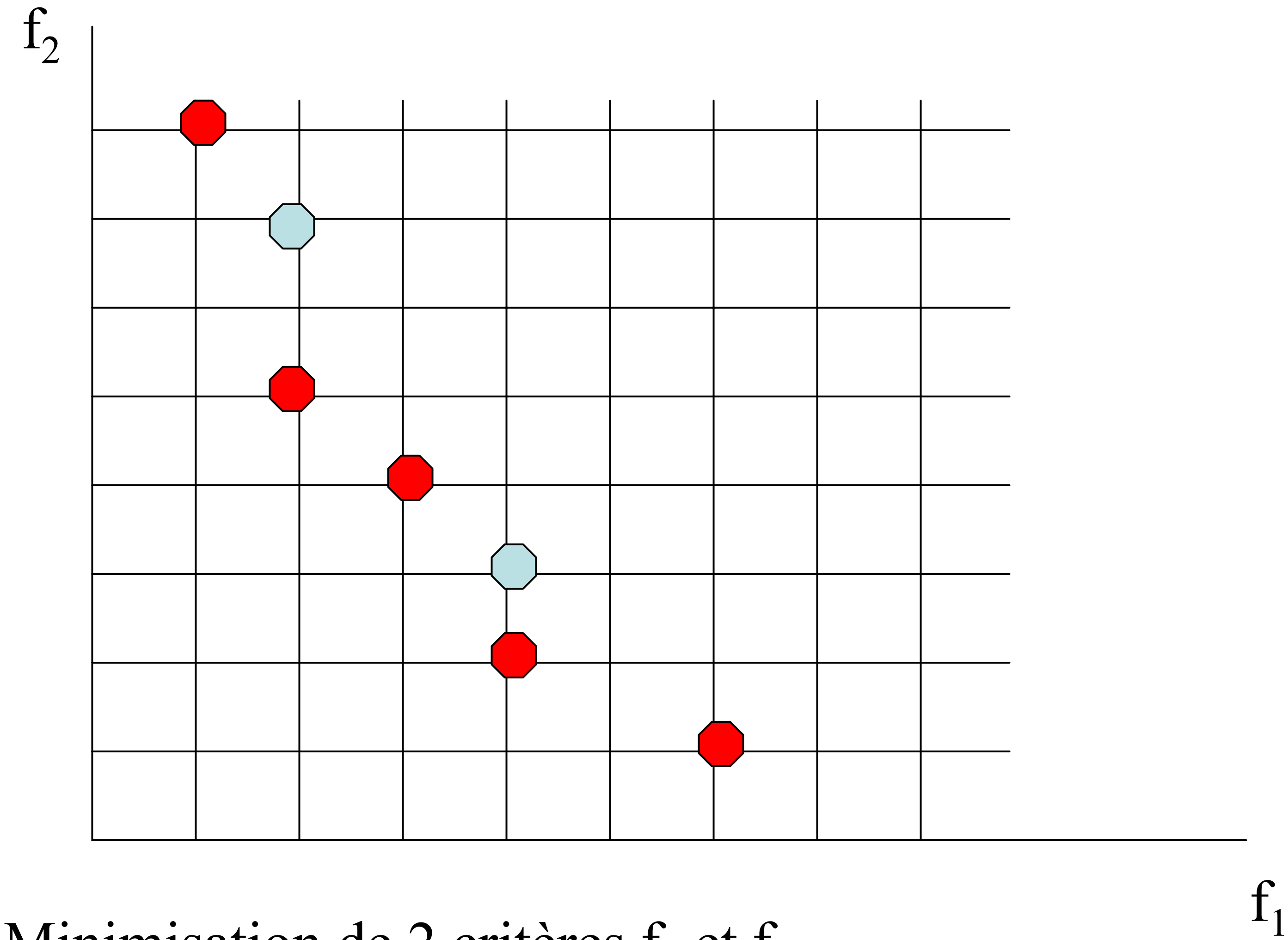
Chaque solution s de S est évaluée par K critères $f_1(s), f_2(s),\dots,f_K(s)$.

2 problèmes importants :

- déterminer une solution s* non dominée (point de Pareto strict), c'est-à-dire vérifiant : il n'existe pas s dans $S \backslash \{s^*\}$ telle que :

$$\forall k \in 1..K,\ f_k(s) \leq f_k(s^*)$$

- déterminer tous les points de Pareto stricts (frontière de Pareto).



Minimisation de 2 critères f_1 et f_2

Points de Pareto (rouges et bleus)

Points de Pareto stricts (rouges)

Les outils de la R.O.

Complexité et approximation;
Théorie des graphes ;
Probabilités et Processus stochastiques ;
Programmation mathématique (continue et discrète);
Programmation linéaire (continue, entière et mixte);
Programmation dynamique ;
Méta-heuristiques ;
Méthodes énumératives ;
………..

Théorie des graphes

La plupart des problèmes combinatoires de la R.O. ont un graphe comme support :

- TSP généralisé (graphe des communications);
- Ordonnancement (graphe des précédences) ;
- Transport (graphe des liaisons) ;
- Emplois du temps (graphe des incompatibilités) ;
- Flots et circulations (graphe des liaisons)

Les progrès en :

- théorie des graphes ;
- algorithmique sur les graphes ;

ont des retombées importantes en R.O.
(ex: le théorème max-flot min-cut de Ford et Fulkerson)

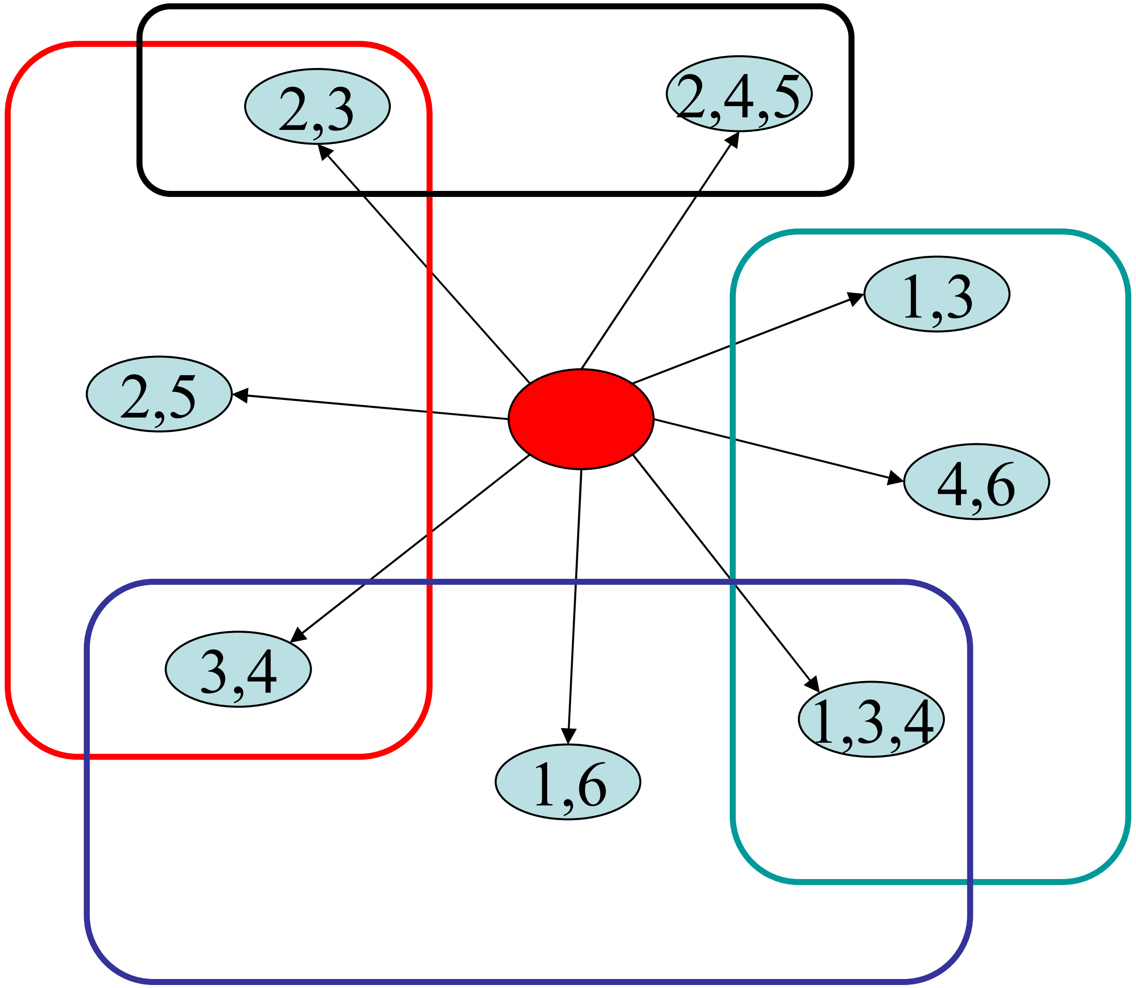
Inversement, les applications de la R.O. font naître de nouveaux problèmes de graphes.

Exemple en télécommunications :
un cas particulier de routage multicast.

Donnée :

- un émetteur multicast,
- un réseau en étoile ;
- demandes de clients (sous-ensembles de canaux) ;
- des sessions (sous-ensembles de clients) ;
- un nombre maximum K d'arbres de diffusion

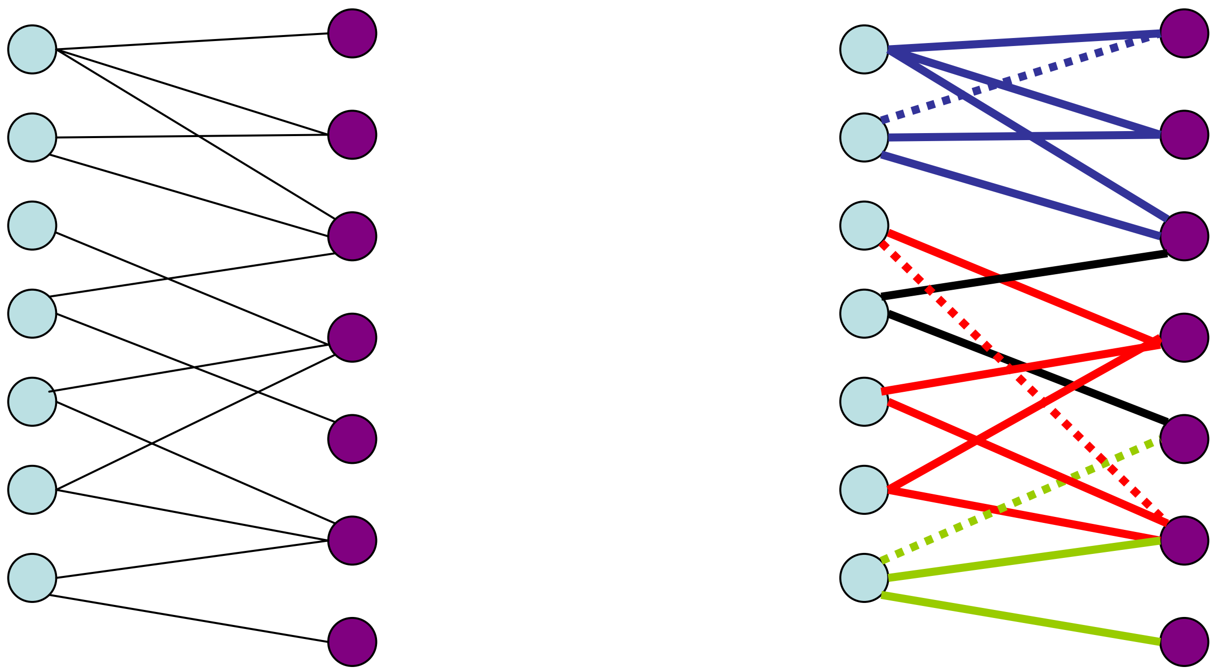
Déterminer une partition de coût minimal des sessions en au plus K classes.



8 clients
4 sessions
K=2

Coût du regroupement en 2 classes :
classe 1 (sessions rouge et noire groupées) : coût = 2 + 2 + 2 + 1 ;
classe 2 (sessions bleue et verte groupées) : coût = 2 + 2 + 1 + 2 + 2 ;
coût total : 7 + 9 = 16.

Ce problème se modélise par un graphe biparti (sessions*clients) :



Il faut déterminer le nombre minimal d'arêtes à ajouter pour qu'il existe un recouvrement des arêtes en au plus K bi-cliques réalisant une partition des sessions.

Pour l'exemple, en ajoutant 3 arêtes, on obtient une solution à 4 bi-cliques.

Programmation linéaire

Donnée :

A : matrice m*n

c : vecteur ligne 1*n ;

d : vecteur colonne m*1

Problème : $\text{Max}\{cx/Ax \leq b, x \geq 0\}$

3 formes :

- PLC : $x \in \Re^n$;
- PLNE : $x \in \aleph^n$;
- PLM : $x=(x', x'')$, $x' \in \Re^{n'}$, $x'' \in \aleph^{n''}$;

Remarque :

PLNE et PLM sont dominantes dans les applications.

1947 : Algorithme du simplexe (G.B. Dantzig)
et méthode des tableaux

Résultat scientifique de tout premier plan ;
Evénement fondateur de la R.O.

Difficultés face aux problèmes réels :

- instabilités numériques ;
- dégénérescence et cyclage possibles (applic. transport) ;
- flexibilité réduite pour intégration dans les applications PLNE où il faut exécuter une suite de PLC obtenue après :
  - ajout et suppression de lignes et/ou colonnes ;
  - fixation de variables.

Difficultés « théoriques » :

- l'algorithme du simplexe n'est pas polynomial ;
- question : complexité du problème PLC?

1979 : Le problème de la complexité de PLC a été résolu par Khachiyan :

- PLC est polynomial ;
- algorithme de l'ellipsoïde.

1984 : Karmarkar propose un algorithme « révolutionnaire » (méthode de point intérieur) qui est à la base des algorithmes les plus performants actuels pour résoudre les plus gros problèmes réels :
les algorithmes primal-dual à barrière logarithmique.

Très récemment, ???? propose une preuve que PLC est fortement polynomial (à confirmer!)

Progrès algorithmiques :

- algorithme dual du simplexe avec pente maximale (choix de la variable sortante);
- algèbre linéaire :
  - factorisation LU dynamique ;
  - outils spécifiques pour systèmes linéaires creux.
- développement d'une factorisation de Choleski à « remplissage minimal » (ajout d'un nombre minimum de coefficients non nuls);
- algorithme de Karmarkar ;
- presolving (réduction de la taille par recherche des contraintes redondantes et fixation de variables)
- méthodes de perturbations et d'extension de bornes (pour la dégénérescence et le cyclage)
- Pricing hybride : partial pricing et devex pricing

En 10 ans : gain de 6 ordres de grandeur dont :

3 dûs à la technologie ;

3 dûs à la théorie et l'algorithmique.

Un problème qui exigeait 10 années de calcul peut aujourd'hui être résolu en moins de 30 secondes.

D'autres facteurs ont largement contribué à ces progrès :

- machines de bureau rapides ;
- disponibilité de données de grande taille ;
- langages de modélisation algébrique.

Tendance actuelle :

Adapter la résolution de PLC aux exigences de la PLNE et de l'approche polyédrique des problèmes combinatoires (Branch and Cut, Génération de colonnes,…)

La R.O. dans le monde

Discipline reconnue, enseignée et valorisée dans de nombreux pays

Production scientifique très importante dans des journaux de qualité (Operations Research, Management Science, Discrete Optimization, INFORMS, EJOR, …)

Une fédération internationale : IFORS ;
Une association européenne: EURO ;
Des sociétés savantes nationale efficaces (CORS, Live OR, AIRO, ROADEF,…)
Des congrès internationaux réguliers généralistes et spécifiques (EURO, CO, MAPSP, PMS, …)

La R.O. en France :
Enseignement et Recherche

Enseignement :

- Formation solide dans la plupart des écoles d'ingénieurs :
- Formations plus « dispersées » dans les universités
  - le plus souvent en Informatique ;
  - quelquefois en Mathématiques Appliquées.
- Quelques centres où la RO est bien implantée
  (Clermont-Ferrand, Grenoble, Nancy, Compiègne, Bordeaux,
  Paris(6,9,11,13,CNAM/IIE,Evry)

Recherche :

- Recherche active et productive mais trop atomisée ;
- Des secteurs en pointe (ordonnancement, optimisation combinatoire, …)
- Beaucoup de jeunes chercheurs ;
- Collaborations industrielles nombreuses mais de petite ou moyenne amplitude ;
- Un tissu assez dense de relations internationales personnalisées.

L’ Action Spécifique R.O du CNRS. (2003) a permis à la communauté :

- de mieux de se connaître ;
- de se structurer ;
- d’élaborer un projet de GDR.

Le GDR R.O. (janvier 2006) donnera une dimension et une visibilité nouvelle à la discipline à travers :

- des projets scientifiques novateurs regroupant des compétences ;
- l’accroissement des collaborations internationales et industrielles ;
- le renforcement des activités d’animation de la recherche;

La R.O. dans les entreprises

Peu d'entreprises ont un service R.O. au sens strict .

La R.O. est souvent une composante d'un service plus large traitant de problèmes de :

- gestion et organisation ;
- logistique et systèmes d'informations.

Ex: SNCF, AIR France, …

Devant un problème difficile, les entreprises font appel

- à une société de consultance (ex: ILOG,EURODECISION, ….)
- à une équipe d'une université ou d'un institut de recherche (contrats, bourses CIFRE, …)

Les collaborations université-industrie sont en progression importante depuis les années 1990.